2. En los siguientes apartados, grafique la región de integración R y plantee mediante integración iterada, de dos formas distintas, $\iint_R dxdy$ y $\iint_R dydx$

a. $R.\begin{cases} y \geq x \\ y \leq \sqrt{x} \end{cases}$

b. $R.\begin{cases} y \leq x+2 \\ x \geq -1 \\ x \leq 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$

c. $R.\begin{cases} y \leq senx \\ y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ Considere la función $\operatorname{arcsen}(y) = -i \ln\left(i\,y \pm \sqrt{1-y^2}\right)$

solucion a.

Gráficar la región ***R*** **y** plantear las integrales iteradas en ambas órdenes**:**

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy \text{ y } \iint_R f(x,y)\,dydx$$

(En este caso, $f(x,y)=1$, si no se da una función específica).

a. Región **R**:

$\{ y \geq x, y \leq \sqrt{x} \}$

Paso 1: Determinar intersección

Igualamos: $x = x \Rightarrow x2 = x \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0,1$

Paso 2: Límites para cada orden

Forma 1: $\int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{\sqrt{x}} dydx$

Forma 2: $\int_{x=0}^{1}\int_{x=y^2}^{y} dydx$

b. Región **R:**

R = $\left\{ \begin{array}{c} y \leq x+2 \\ x \in [-1,3] \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

Paso 1: Despejamos límites

Es una región bajo la curva y=sinx, entre **X**=0 y **X**=π

Forma 1: $\int_{x=-1}^{3}\int_{y=0}^{x+2} dydx$

Para el orden inverso:

Los valores de **Y** van de 0 a 5 (cuando **X**=3, **Y**=5), y para cada $y, x \in [y-2, 3]$

Forma 2: $\int_{y=0}^{5}\int_{x=max(-1,\,y-2)}^{3} dxdy$

c. Región **R**:

R= $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq sinx \end{array} \right\}$

Es una región bajo la curva y=sinx, entre **X**=0 y **X**=π

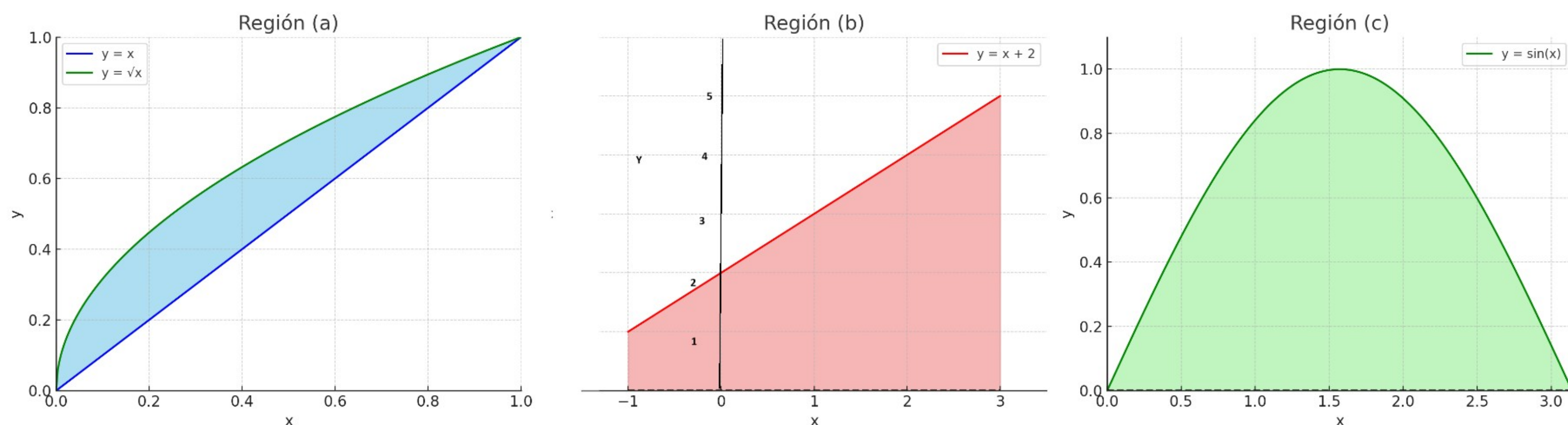
Forma 1: $\int_{x=0}^{\pi}\int_{y=0}^{sinx} dydx$

Forma 2 no es práctica aquí (función no invertible en todo intervalo).
Pero teóricamente, para $y \in [0,1]$, usarías los arcosenos inversos:

Forma 2(más complicada):

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=\arcsin y}^{\pi - arcsinx} dxdy$$

Las gráficas de las regiones de integración R



Región (a):

- Delimitada por: $y \geq x$ y $y \leq \sqrt{x}$
- Región encerrada entre la línea recta y=x y la curva $y=\sqrt{x}$ desde x=0 hasta x=1

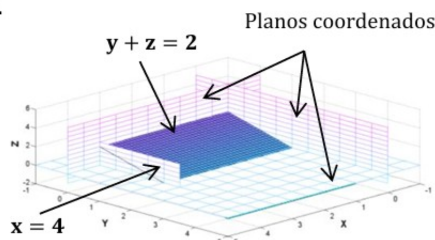
Región (b):

- Delimitada por: $y \leq x+2$, $x \in [-1,3]$, $y \geq 0$
- Es un área triangular o trapezoidal entre la recta y=x+2 y el eje y=0

Región (c):

12. Determine el volumen o la masa de los siguientes sólidos

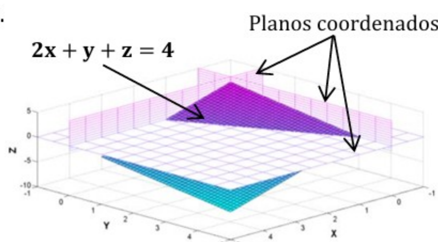
a.



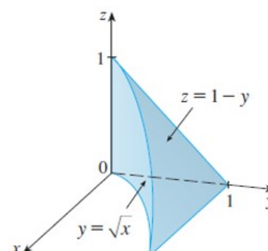
b. La masa del sólido de densidad $\sigma(x, y) = x + y^2$ limitado por:

$$\begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \\ 0 \le z \le c \end{cases}$$

c.



d.



a. Volumen del sólido limitado p

soluciona

- y + z=2y + z = 2y+z=2
- x = 4
- Planos coordenados: x = 0, y = 0, z = 0

Límites de integración:

$$0 \le x \le 4$$
$$0 \le y \le 2$$
$$0 \le z \le 2 - y$$

Volumen $V = \iiint_S 1\, dz\, dy\, dx$

$$V = \int_0^4 \int_0^2 \int_0^{2-y} 1\, dz\, dy\, dx = \int_0^4 \int_0^2 (2 - y)\, dy\, dx = \int_0^4 [2y - \frac{y^2}{2}]_0^2\, dx = \int_0^4 (4 - 2)\, dx = \int_0^4 2\, dx = 8$$

b. Masa del sólido con densidad $\sigma(x, y) = x + y^2$

y limitado por: $0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c$

La densidad no depende de z, entonces integramos así:

$$M = \iiint \sigma(x, y)\, dz\, dy\, dx = \int_0^a \int_0^b \int_0^c (x + y^2)\, dz\, dy\, dx = \int_0^a \int_0^b (x + y^2) \cdot c\, dy\, dx = c \int_0^a \int_0^b (x + y^2)\, dy\, dx$$

Resolvemos: $= c\int_0^a [xy + \frac{y^3}{3}]_0^b dx = c\int_0^a (xb + \frac{b^3}{3})\, dx = c[\frac{a^2 b}{2} + \frac{ab^3}{3}] = \boxed{c(\frac{a^2 b}{2} + \frac{ab^3}{3})}$

c. Volumen del sólido limitado por:

- 2x+y+z=4
- Planos coordenados: x=0, y=0, z=0

Despejamos z: **z=4−2x−y**

Límites de integración:

Para que **z≥0⇒2x+y≤4**

Esto define una región triangular en el plano xy entre:

- **x=0**
- **y=0**
- **y=4−2xy**

$$V = \iiint 1\, dz\, dy\, dx = \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{4-2x-y} 1\, dz\, dy\, dx$$

Primero **z, l**uego **y, l**uego **x:**

$$V = \int_0^2 \int_0^{4-2x} (4-2x-y)\, dy\, dx$$

Resolvemos:

$$= \int_0^2 [(4-2x)y - \frac{y^2}{2}]_0^{4-2x} dx = \int_0^2 [(4-2x)(4-2x) - \frac{(4-2x)^2}{2}] dx$$

$$= \int_0^2 [(4-2x)^2 - \frac{(4-2x)^2}{2}] dx = \int_0^2 \frac{(4-2x)^2}{2} dx$$

$$(4-2x)^2 = 16 - 16x + 4x2 \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^2 (16 - 16x + 4x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}[16x - 8x2 + \frac{4x^3}{3}]_0^2 = \frac{1}{2}[32 - 32 + \frac{32}{3}] = \boxed{\frac{16}{3}}$$

d. Volumen del sólido limitado por:

$$z = 1 - y$$
$$y = \sqrt{x}$$

Coordenadas positivas: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Observamos que $y=\sqrt{x} \Rightarrow x=y^2$

Limites: $y\in[0,1]$, $x\in[0,y^2]$, $z\in[0,1-y]$

$$V=\int_0^1\int_0^{y^2}\int_0^{1-y}1\,dz\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^{y^2}(1-y)\,dx\,dy=\int_0^1(1-y)\,y^2\,dy$$

22 **6.** Complete.

a. $\int_C f(x,y)ds =$…………….....

b. La interpretación física que puede darse al resultado anterior es……………………..

soluciona

A.

$$\int_C f(x,y)\,ds=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Este es el desarrollo de la ***integral de línea escalar*** a lo largo de una curva ***C*** parametrizada por $r(t)=(x(t),y(t))$ donde $t\in[a,b]$

B. Interpretación física:

La integral $\int_C f(x,y)ds$

representa la **masa de un alambre delgado** ubicado sobre la curva ***C***, si la densidad lineal del alambre en el punto (x,y) es $f(x,y)$.

32 **1.** Indique la expresión de dS, si la superficie está dada.

a. En forma explícita $z = f(x, y)$

b. En forma implícita $S(x, y, z) = 0$

soluciona.

a. Superficie en forma explícita:

Si la superficie está dada como: $z = f(x, y)$

Entonces la **diferencial de área de superficie** es:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial ff}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

b. Superficie en forma implícita: Si la superficie está dada como:

$$S(x, y, z) = 0$$

Entonces:

$$dS = \frac{|\nabla S|}{\left|\frac{\partial S}{\partial z}\right|}\, dx\, dy$$

(Si se proyecta sobre el plano xy; análogamente se puede proyectar sobre otros planos si conviene más).

Donde:

$$|\nabla S| = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2}$$

42 **11.** Enuncie el Teorema de Stokes, distinguiendo hipótesis y tesis ¿Qué tipo de integrales relaciona?

solucionа.

El **Teorema de Stokes** es un resultado fundamental del cálculo vectorial que relaciona una integral de **superficie** con una integral **de línea**.

Enunciado del Teorema de Stokes

Sea ***S*** una superficie orientable y suavemente trazada en $\vec{R}$ con borde ∂S y sea F un campo vectorial de clase C^1 (continuamente diferenciable) definido en una región que contiene a ***S***. Entonces:

$$\oint_{\partial S} F \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times F) \cdot \vec{n}\, dS$$

Hipótesis (condiciones necesarias):

1. ***S*** es una superficie **orientable**, de clase C^1 (suavemente trazada).
2. ∂S es el **borde cerrado** de ***S***, orientado positivamente (según la regla de la mano derecha).
3. F es un campo vectorial de clase C^1 en una región abierta que contiene a ***S.***

Tesis (lo que afirma el teorema):

La **integral de línea** de F a lo largo del borde cerrado ∂***S*** es igual a la **integral de superficie** del rotacional de F sobre ***S***.

¿Qué tipo de integrales relaciona?

El Teorema de Stokes **relaciona**:

- Una **integral de línea** sobre una curva cerrada:

$$\oint_{\partial S} F \cdot d\vec{r}$$

- Con una **integral de superficie** del **rotacional** del campo vectorial:

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot \vec{n}\, dS$$

Interpretación geométrica:

El teorema expresa que la **circulación** de un campo vectorial a lo largo del borde de una superficie es igual al **flujo del rotacional** del campo a través de la superficie misma.